Texte 3,Choix du consommateur en présence d'incertitude ou de risque

Microéconomie 3-851-84

Rédigé par Paul Cardinal supervisé par Marie Allard

1. Introduction

Les modèles économiques développés jusqu'à maintenant s'inscrivaient dans un contexte de certitude, c'est-à-dire que les choix des différents agents portaient sur des variables dont les valeurs sont déterminées à l'avance de façon précise. Cependant, dans la réalité, plusieurs décisions sont prises en contexte d'incertitude, où les valeurs prises par certaines variables sont conditionnelles à la réalisation d'un évènement ou état de la nature[1]. Nous visons ici à présenter un modèle permettant d'expliquer les comportements en présence d'incertitude. Plus particulièrement, nous nous intéresserons ici au comportement du consommateur face aux situations risquées. Le modèle nous permettra de saisir comment un individu compare entres elles des alternatives risquées et des alternatives certaines. Nous verrons également certaines applications du modèle, par exemple, le comportement du consommateur face aux loteries, l'achat de polices d'assurance, ou encore, le choix de placements spéculatifs.

2. Valeur espérée ou espérance mathématique

Considérons une situation risquée où il y a "S" évènements (ou états du monde) possibles $E_1, E_2, ..., E_s, ..., E_S$ et où à chaque évènement E_s est associé une valeur de la variable X_s et une probabilité[2] π_s (avec $0 < \pi_s < 1$ et $\Sigma\, \pi_s = 1$).

L'espérance mathématique ou la valeur espérée de la variable, notée E[X], est donnée par:

[1] On parle alors de variables aléatoires.

[2] Les probabilités pertinentes seront données dans les problèmes. Nous ne nous soucions aucunement de leur provenance ou de leur nature.

$$E[X] = \sum_{s=1}^{S} \pi_s \; X_s$$

La valeur espérée d'une variable est la somme pondérée de toutes les valeurs qu'elle peut prendre, les facteurs de pondération étant leurs probabilités d'occurence respectives. C'est la valeur moyenne à laquelle on devrait s'attendre lorsque S tend vers l'infini.

Exemple 1: *Calcul de la richesse espérée.*

Soit une situation risquée A où trois évènements E_1, E_2 et E_3 sont possibles. Une richesse W_s est associée à la réalisation de chacun des évènements.

Quelle est la richesse espérée si W_1 = 1 200 \$, W_2 = 600 \$, W_3 = 300 \$ et les trois évènements sont équiprobables ?

Nous avons:

$$E[W]_A = \pi_1 W_1 + \pi_2 W_2 + \pi_3 W_3$$

$$\mathbf{E[W]_A = \frac{1}{3}(1200) + \frac{1}{3}(600) + \frac{1}{3}(300)}$$

$$\mathbf{= 400 + 200 + 100 = 700 \ \$}$$

En présence de certitude, des agents économiques rationnels se comportent de manière à maximiser la valeur de la variable concernée. Cependant, dans un contexte tel que celui décrit plus haut, la valeur prise par la variable étant incertaine, on doit se satisfaire de considérer alors la valeur espérée E[X] de cette variable. Cependant, remarquez qu'il est possible que la valeur espérée ne soit pas observable. Par exemple, le résultat espéré d'un dé est de 3,5 , mais il est impossible d'obtenir ce résultat en lancant le dé. Aussi, il arrive d'observer des situations risquées dont la valeur espérée est la même, mais où le risque impliqué est différent.

En contexte d'incertitude, il est incorrect d'avancer que les individus prennent leurs décisions uniquement sur la base de la valeur espérée E[X]. Le **risque**, ou les variations possibles des valeurs prises par la variable, est aussi un paramètre essentiel à toute décision. À ce titre, la maximisation de la valeur espérée ne peut constituer un critère acceptable.

L'exemple suivant décrit précisément deux situations dont la valeur espérée est la même, mais où le risque impliqué est différent.

Exemple 2: On vous propose de jouer à une loterie (alternative J), qui consiste à tirer une pièce de monnaie. Si la pièce indique face, on vous paie 1000$; si la pièce indique pile, vous devez payer 1000$.

Soit:
E_1: La pièce indique pile
E_2: La pièce indique face
π_1: 1/2
π_2: 1/2
R_1: -1000 $
R_2: 1000 $

Le revenu espéré E[R] de la loterie est de:

$$E[R]_J = \frac{1}{2}(-1000) + \frac{1}{2}(1000)$$

$$= -500 + 500 = 0$$

Si vous refusez de jouer à la loterie (alternative RJ), votre revenu espéré sera évidemment de

$$E[R]_{RJ} = 1(0) = 0$$

Nous voilà donc en présence de deux situations où le revenu espéré est le même $E[R]_J = E[R]_{RJ} = 0$. Si la maximisation du revenu espéré constitue votre critère de décision, vous devriez être totalement indifférent entre prendre part ou non à cette loterie. Pourtant, vous avez probablement un jugement plus favorable pour l'une ou l'autre des deux alternatives et, à cet effet, vous avez sûrement intégré à votre raisonnement l'idée que l'alternative J est risquée alors que l'alternative RJ est certaine. L'attitude face au risque est déterminante dans le choix des individus. On doit concevoir un critère faisant explicitement appel à cette attitude de l'individu face au risque. Cela est possible avec le modèle d'utilité espérée de von Neumann et Morgenstern.

3. La fonction d'utilité de von Neumann-Morgenstern.

La théorie économique des choix face à des alternatives risquées a été developpée, entre autres, par von Neumann et Morgenstern[3]. Comme nous allons le voir, l'hypothèse de base du modèle est, qu'en présence de risque, les individus font des choix basés sur l'utilité espérée ou l'espérance mathématique des utilités. Cette hypothèse repose sur un certain nombre d'axiomes[4] (que nous n'exposerons pas ici cependant) qui sont sensés représenter la rationnalité des choix en environnement risqué .

Sans discuter les axiomes de base, il est toutefois possible de montrer comment on peut construire une fonction d'utilité de von Neumann-Morgenstern.

Considérons une situation risquée, par exemple une loterie, comportant S gains possibles, dont les valeurs sont $X_1,X_2,...,X_s,...,X_S$ et où les X_s sont ordonnées selon un ordre de préférence croissant $(u(X_1)<u(X_2),...,<u(X_s),...,<u(X_S))$. Attribuons de façon arbitraire un indice d'utilité aux valeurs extrêmes X_1 et X_S en posant $u(X_1)=0$ et $u(X_S)=1$. D'après la théorie de von Neumann-Morgenstern, il est possible d'utiliser ces deux valeurs (indices) d'utilité pour attribuer un indice d'utilité à chacun des gains intermédiaires X_s. Pour ce faire, construisons une loterie qui permettra de gagner soit X_1 , soit X_S. Toujours selon la théorie de von Neumann-Morgenstern, il existe, pour l'individu, une probabilité π_s de remporter le gain X_S qui soit telle qu'il sera indifférent entre la loterie et le gain certain X_s. Si l'individu est indifférent entre les deux alternatives,

[3] Cette théorie fut d'abord proposée par Bernouilli en 1738, mais a été reprise et développée davantage par von Neumann et Morgenstern en 1944.

[4] Voir à ce sujet, entre autres, "Calcul économique et microéconomie approfondie", Claude Fourgeaud et Anne Perrot, 1990, p.169 à 172.

c'est qu'il en retire le même niveau d'utilité. **L'utilité associée au gain certain X_s correspond à l'espérance mathématique de l'utilité de cette loterie**, c'est-à-dire que[5]:

$$\mathbf{u(X_s) = (1 - \pi_s)\, u(X_1) + \pi_s \quad u(X_S)}$$

$$\mathbf{= (1 - \pi_s)\,(0) + \pi_s \quad (1)}$$
$$\mathbf{= \pi_s}$$

Nous savons donc maintenant que:

$u(X_1) = 0$

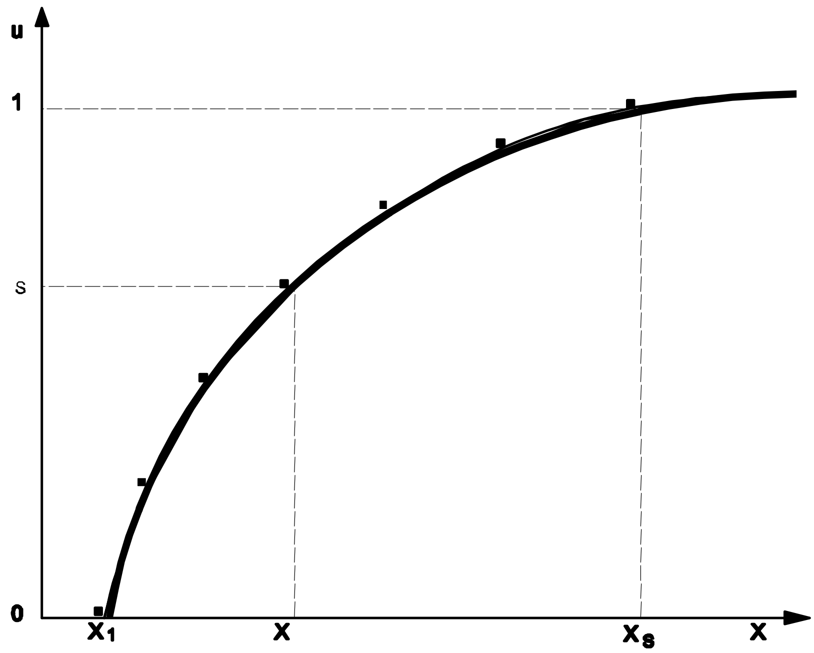
$u(X_s) = \pi_s$

et $u(X_S) = 1$

[5] Attention ! Ce résultat est tributaire de l'échelle que nous avions définie aupa

En procédant de la même façon pour d'autres valeurs intermédiaires X_s, on trouve d'autres points sur la figure et on peut tracer de façon sommaire une fonction d'utilité de von Neumann-Morgenstern, de la forme u=u(X), reflètant les préférences de l'individu pour les différents gains X_s (figure 1).

FIGURE 1



Il est important de noter que les fonctions d'utilité nous servent de moyen pour comparer l'utilité retirée de différentes alternatives risquées et cerner l'attitude face au risque qu'un individu peut manifester..

Enfin, il ne faudrait pas confondre cette fonction d'utilité avec celle déjà présentée dans le cadre du cours. La fonction d'utilité de von Neumann-Morgenstern doit satisfaire des axiomes additionnels. Toutefois, pour ce qui suit, les trois propriétés suivantes seront suffisantes:

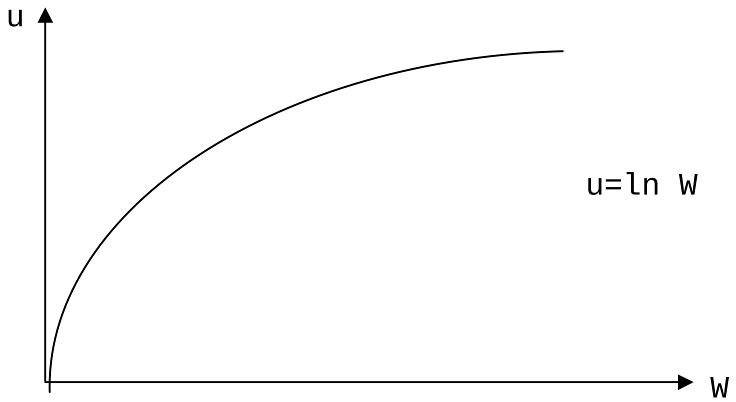
1^0 la fonction est supposée continue et dérivable deux fois;

2^0 elle est strictement croissante (u'(X) > 0),
c'est-à-dire que la satisfaction augmente avec X;

3^0 elle ne peut être remplacée par une fonction monotone croissante, mais peut toutefois être remplacée par n'importe quelle transformation linéaire croissante.

Dans les pages qui suivent, nous nous intéressons aux situations où la variable incertaine est la richesse W du consommateur.

Exemple 3: Soit un individu qui possède la fonction d'utilité suivante u = ln W. Représentons graphiquement cette fonction d'utilité (figure 2).



La courbe d'utilité u=u(W) exprime la satisfaction retirée par l'individu de chaque niveau de richesse.

4. Utilité espérée et critère de décision

La théorie des choix en contexte d'incertitude suppose que les individus se comportent de manière à maximiser l'utilité espérée E[u(W)] des différentes alternatives risquées qui leur sont proposées. Dans le cas particulier où un évènement E_s est certain (π_s=1), l'utilité espérée correspond à l'utilité associée à la richesse certaine à laquelle donne lieu la réalisation de cet évènement $u(W_s)$.

Soit une fonction d'utilité de von Neumann-Morgenstern u=u(W). Une situation risquée A est préférée à une situation risquée B si et seulement si

$$E[u(W)]_A > E[u(W)]_B$$

Les différentes alternatives risquées sont classées selon leur utilité espérée.

<u>Exemple 4</u>: Reprenons les données de l'exemple 1 à la section 2 et la fonction d'utilité de l'individu de l'exemple 3 (u=ln W). Ajoutons une deuxième situation risquée B, où, encore une fois, trois évènements sont équiprobables. La richesse associée à la réalisation de ces trois évènements est de W_1=1800, W_2=300 et W_3=150. Laquelle des deux situations A ou B l'individu préfère-

$$E[u(W)]_A = \pi_1 \; u(W_1) + \pi_2 \; u(W_2) + \pi_3 \; u(W_3)$$

$$= \pi_1 \; \ln \; W_1 + \pi_2 \; \ln \; W_2 + \pi_3 \; \ln \; W_3$$

$$= \frac{1}{3} \; \ln \; (1200) + \frac{1}{3} \; \ln \; (600) + \frac{1}{3} \; \ln \; (300)$$

$$= \frac{1}{3} \; (7{,}09) + \frac{1}{3} \; (6{,}40) + \frac{1}{3} \; (5{,}70)$$

$$= 2{,}36 + 2{,}13 + 1{,}9 = 6{,}39$$

t-il ?

L'utilité espérée de la situation B est donnée par:

$$E[u(W)]_B = \pi_1 \; u(W_1) + \pi_2 \; u(W_2) + \pi_3 \; u(W_3)$$

$$= \pi_1 \; \ln \; W_1 + \pi_2 \; \ln \; W_2 + \pi_3 \; \ln \; W_3$$

$$= \frac{1}{3} \; \ln \; (1800) + \frac{1}{3} \; \ln \; (300) + \frac{1}{3} \; \ln \; (150)$$

$$= \frac{1}{3} \; (7{,}5) + \frac{1}{3} \; (5{,}7) + \frac{1}{3} \; (5{,}01)$$

$$= 2{,}5 + 1{,}9 + 1{,}67 = 6{,}07$$

Puisque 6,39 > 6,07 ($E[u(W)]_A > E[u(W)]_B$), l'invidu préfère la situation A.

Remarquez que la richesse espérée de la situation B

$$E[W]_B = \pi_1 W_1 + \pi_2 W_2 + \pi_3 W_3$$

$$= \frac{1}{3} \; (1800) + \frac{1}{3} \; (300) + \frac{1}{3} \; (150)$$

$$= 600 + 100 + 50 = 750$$

est supérieure (750 > 700) à la richesse espérée de la situation A. Pourtant, l'individu préfère tout de même la situation A. Notez que ce résultat a été obtenu uniquement à partir des préférences de l'individu représentées par sa fonction d'utilité, sans que nous ayons eu besoin de définir une quelconque mesure de risque.

5. Formes des fonctions d'utilité et attitudes face au risque

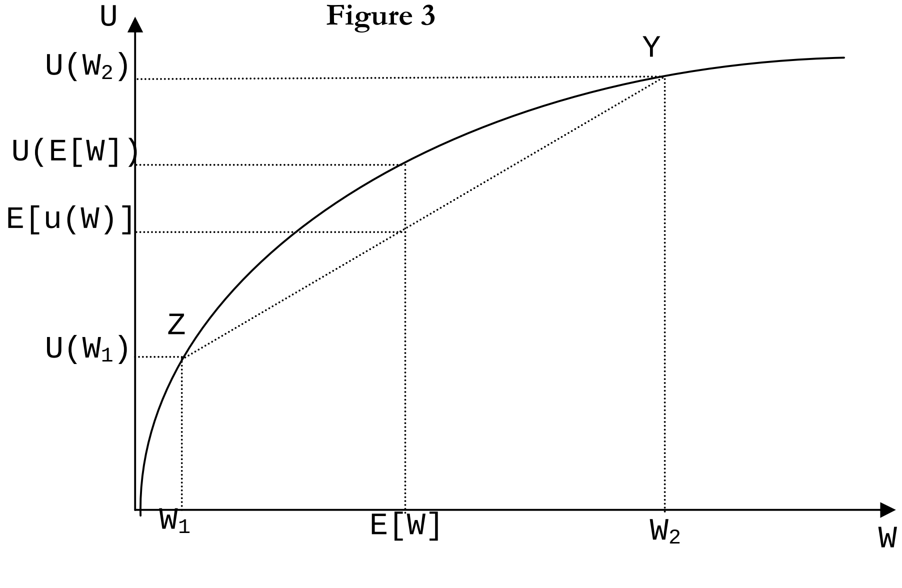
Nous savons déjà que u'(W) > 0 et que la fonction d'utilité est croissante. Le signe de la dérivée seconde de la fonction d'utilité u"(W) nous renseigne davantage sur la forme de la fonction d'utilité et son implication particulière en ce qui a trait à l'attitude face au risque. Trois cas sont possibles:

1^0	u"(W) < 0	la fonction d'utilité est concave;
2^0	u"(W) = 0	la fonction d'utilité est linéaire;
3^0	u"(W) > 0	la fonction d'utilité est convexe.

Afin d'illustrer ces trois cas, utilisons une situation risquée où, pour simplifier, la richesse ne peut prendre que deux valeurs: W_1 avec une probabilité de π_1 et W_2 avec une probabilité de $\pi_2 = 1 - \pi_1$.
Illustrons d'abord le cas d'une fonction d'utilité concave (u"(W) < 0) (figure 3).

La richesse espérée est le point sur l'axe horizontal correspondant à $\pi_1 W_1 + \pi_2 W_2 = E[W]$.

Figure 3



Toujours sur la figure 3, nous avons identifié l'utilité associée à une richesse certaine de W_1 par le point Z et l'utilité associée à une richesse certaine de W_2 par le point Y. L'utilité espérée d'une situation risquée où la richesse ne peut prendre pour valeur que W_1 ou W_2 se trouve sur la corde ZY, à un point correspondant à π_1

$u(W_1) + \pi_2 u(W_2) = E[u(W)]$. Graphiquement, l'utilité espérée d'une telle situation risquée est en fait la hauteur de la corde ZY mesurée à W=E[W].

Une fonction concave passe toujours au-dessus de n'importe quelle corde tracée à partir de deux points de la fonction. C'est dire qu'une richesse certaine égale à E(W) procure davantage de satisfaction à l'individu qu'une situation risquée combinant W_1 et W_2 avec revenu espéré égal à E(W)), dont l'utilité est donnée par E[u(W)] (ceci est vrai quelles que soient les proportions π_1 et π_2).

On voit que:

$$u[E(W)] > E[U(W)]$$

Une fonction d'utilité concave représente les préférences d'un individu qui a de l'aversion pour le risque.

Définition: Un individu a de l'**aversion pour le risque** s'il préfère (il atteint un niveau d'utilité plus élevé pour) une richesse certaine égale à w à une situation risquée de richesse espérée E[W] = w.

Souvent, on caractérise également la personne ayant de l'aversion pour le risque comme étant celle qui refusera systématiquement de prendre part à une situation risquée dont l'espérance de revenu net est nulle, ou, en d'autres termes, dont le coût correspond exactement au revenu espéré[6]. La loterie décrite à l'exemple 2 en est un exemple.

L'individu qui a de l'aversion pour le risque refuserait de prendre part à cette loterie. Pourquoi ? S'il participe à la loterie et perd 1000$, sa perte d'utilité (par rapport à l'alternative de ne pas jouer) sera plus grande que ce qu'il gagnerait en utilité en remportant 1000$ (figure 4).

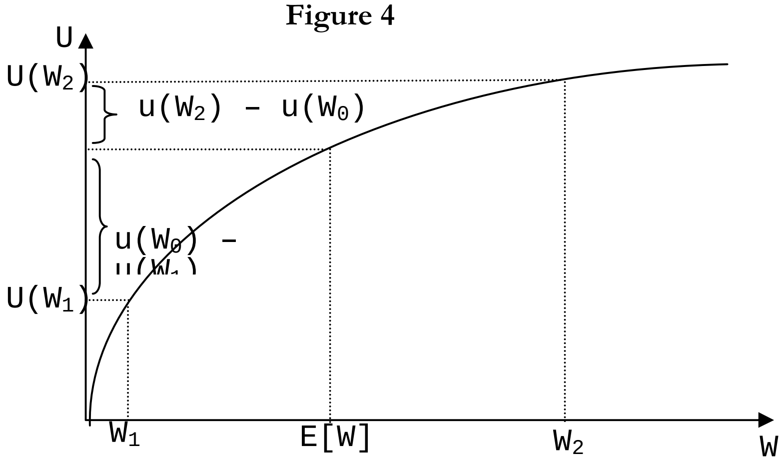
Sur la figure, on voit bien que si l'individu participe à la loterie et $W=W_1$, sa perte d'utilité sera de $u(W_0) - u(W_1)$, alors que si $W=W_2$, il gagne $u(W_2) - u(W_0)$ en utilité. Or,

$$u(W_0) - u(W_1) > u(W_2) - u(W_0)$$

[6] En anglais, on utilise le terme "fair game" pour décrire un telle situation.

L'utilité marginale de la richesse est décroissante pour l'individu qui a de l'aversion pour le risque.

Figure 4

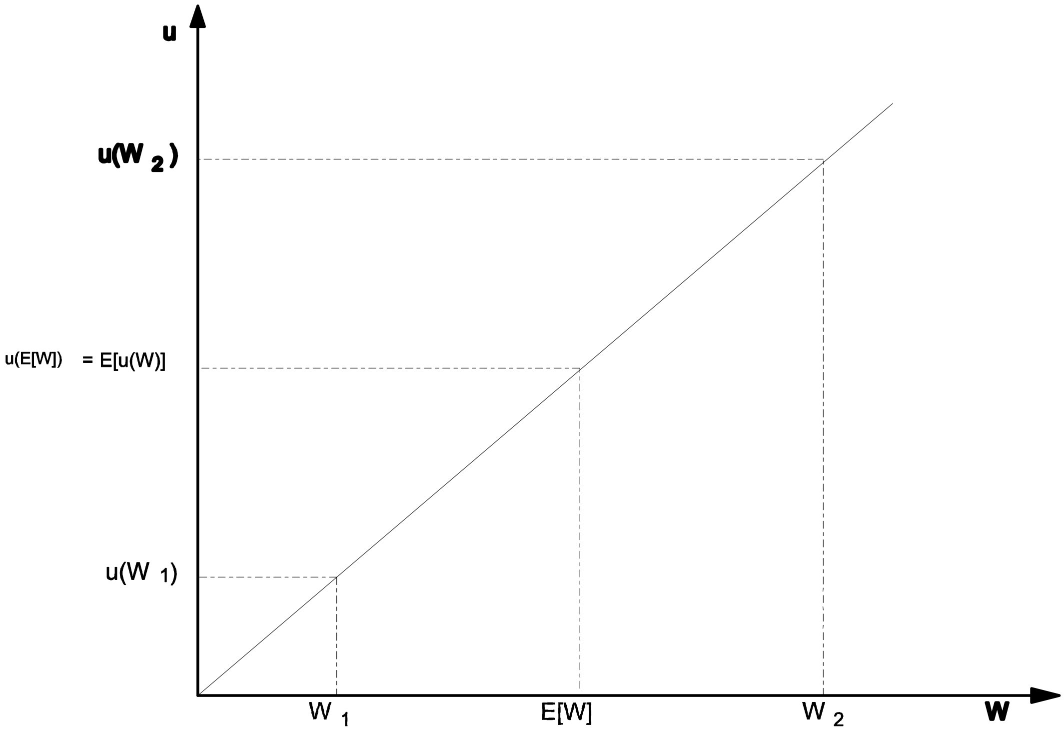


<u>En général, les individus ont de l'aversion pour le risque[7].</u> Voyons tout de même de façon sommaire les deux autres cas.

Illustrons le cas d'une fonction d'utilité linéaire (u"(W) = 0) (figure 5).

[7] En finance, la théorie de portefeuille est fondée sur ce principe largement vérifié.

FIGURE 5



Une richesse certaine égale à E(W) procure le même niveau d'utilité à l'individu qu'une situation risquée construite avec W_1 et W_2.

On voit que:

$$u[E(W)] = E[u(W)]$$

Une fonction d'utilité linéaire représente les préférences d'un individu qui est indifférent ou encore neutre face au risque.

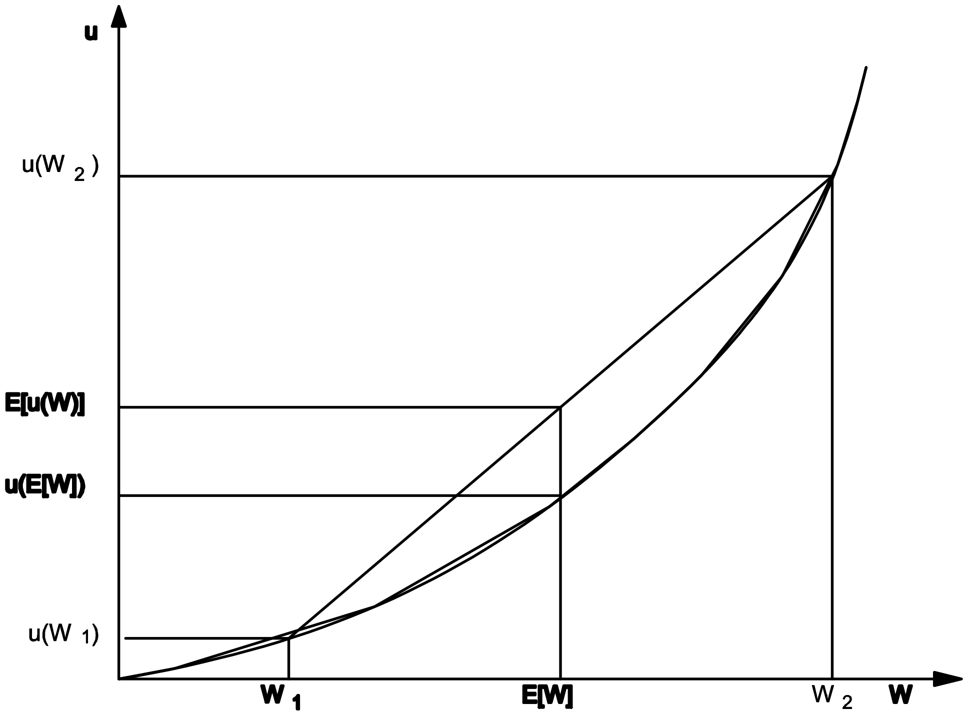
Définition: Un individu est **neutre face au risque** s'il est indifférent entre (s'il atteint le même niveau d'utilité pour) une richesse certaine égale à w et prendre part à une situation risquée de richesse espérée E[W]=w.

Pour l'individu neutre face au risque, s'il participe à la loterie de l'exemple 2 et perd 1000$ ($W=W_1$), sa perte d'utilité est la même que ce qu'il gagnerait en utilité en remportant 1000$ ($W=W_1$).

L'utilité marginale de la richesse est constante pour l'individu neutre face au risque.

Finalement, illustrons le cas d'une fonction d'utilité convexe (u"(W) > 0).

FIGURE 6



Une fonction convexe passe toujours au-dessous d'une corde tracée à partir de deux points de la fonction. C'est dire qu'un revenu certain égal à E(W) procure moins d'utilité à l'individu qu'une situation risquée construite à partir de W_1 et W_2.

On voit que:

$$u[E(W)] < E[u(W)]$$

Une fonction d'utilité convexe représente les préférences d'un individu qui recherche le risque.

Définition: Un individu recherche ou **aime le risque** s'il préfère (s'il atteint un niveau d'utilité supérieur pour) une situation risquée d'utilité espérée E[u(W)] = w à une richesse certaine égale à w.

L'individu qui recherche le risque accepterait de participer à la loterie décrite à l'exemple 2. S'il participe à la loterie et perd 1000$ ($W=W_1$), sa perte d'utilité sera plus faible que ce qu'il gagnerait en utilité en remportant 1000$ ($W=W_2$).

L'utilité marginale de la richesse est croissante pour l'individu qui recherche le risque.

Le tableau 1 résume les trois cas que nous venons de présenter.

TABLEAU 1

Signe de la dérivée seconde	Forme de la fonction d'utilité	Attitude face au risque
u"(W) < 0	Concave	Aversion au risque
u"(W) = 0	Linéaire	Neutre face au risque

u"(W) > 0	Convexe	Recherche le risque

6. Un exemple d'application: la valeur attribuée à une police d'assurance

Supposons que la totalité de la richesse d'un consommateur qui a de l'aversion pour le risque se résume à un immeuble. Il envisage l'achat d'une police d'assurance contre le feu. Sa richesse sans assurance sera de W_1 si l'immeuble est incendié et de W_2 (la valeur de l'immeuble) si l'immeuble n'est pas incendié. S'il y avait feu, nous faisons l'hypothèse que les dommages causés par l'incendie seraient fixes et égaux à W_2 - W_1. Le consommateur estime à π_1 la probabilité de voir son immeuble incendié. Quelle est la prime maximale qu'il serait prêt à payer pour une assurance complète contre le feu ?

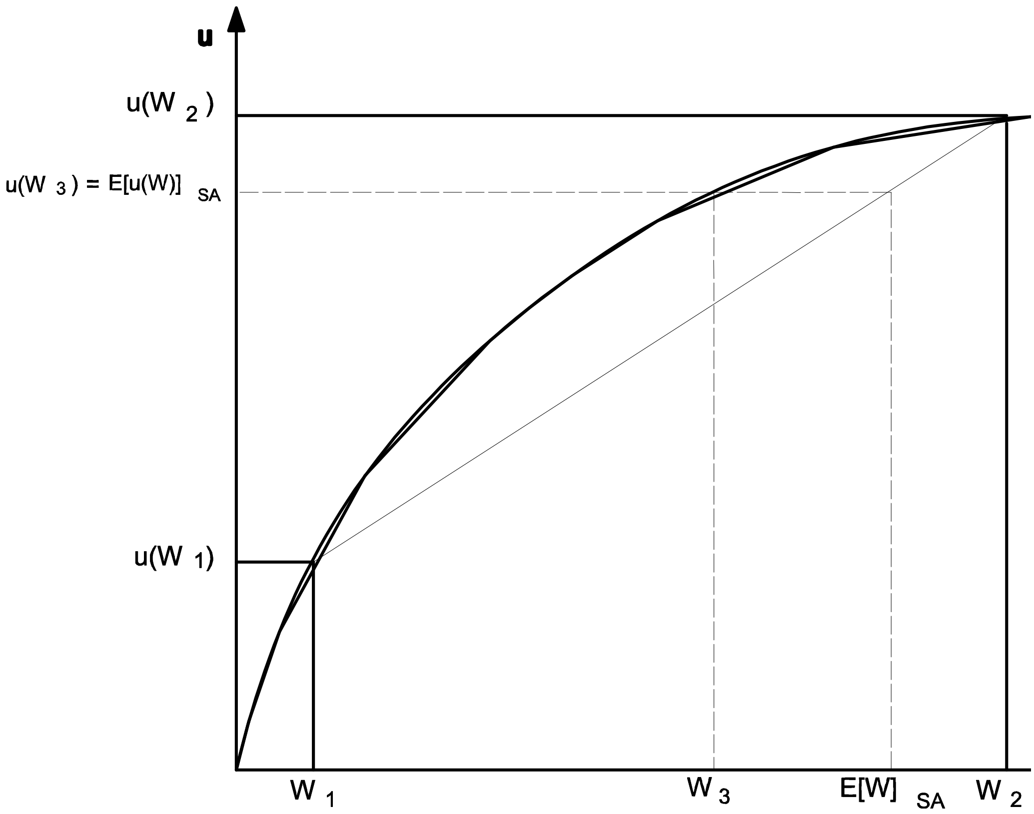
Sans police d'assurance (SA) on a:

$$E[W]_{SA} = \pi_1 W_1 + (1-\pi_1) W_2$$

et $$E[u(W)]_{SA} = \pi_1 u(W_1) + (1-\pi_1)u(W_2)$$

Il existe une richesse certaine égale à W_3 qui procure exactement le même niveau de satisfaction ($u(W_3) = E[u(W)]$) (figure 7).

FIGURE 7



Supposons que le consommateur assure son immeuble et paie une prime P. En échange, s'il y a feu, la compagnie d'assurance s'engage à rembouser la totalité des dommages W_2-W_1.

S'il n'y a pas de feu, la richesse du consommateur sera de $W = W_2 - P$.

S'il y a feu, la richesse du consommateur sera de $W = W_1 - P + (W_2 - W_1) = W_2 - P$.

En assurant son immeuble, le consommateur s'expose maintenant à une situation <u>certaine</u> où sa richesse prendra la valeur W_2 - P.

Le consommateur étant indifférent entre une richesse certaine de W_3 et la situation sans assurance, la prime maximale qu'il est prêt à payer pour assurer son immeuble est de W_2 - W_3. Bien sûr, une richesse certaine supérieure à W_3 serait préférée à la situation sans assurance. Alors, si la prime est inférieure, l'individu aura plus de satisfaction qu'avec la situation sans assurance. Par conséquent, le consommateur accepterait de payer tout montant inférieur ou égal à W_2 - W_3 pour transférer le risque de voir son immeuble incendié à la compagnie d'assurance. On constate qu'un individu ayant de l'aversion pour le risque est prêt à payer pour éviter de prendre des risques !

7. Un exemple d'application: le choix d'un investissement et forme des courbes E(W)-σ

Le modèle que nous venons de présenter peut également servir à comparer des options d'investissement.

Supposons qu'un investisseur a la possibilité d'investir dans trois projets. Le projet A garantit à l'investisseur un rendement R_1. Par ailleurs, le projet B peut produire un rendement de R_2 ou de R_3. Enfin, le projet C peut rapporter un rendement de R_4 ou de R_5.

Construisons l'exemple de manière à ce que

$$R_4 < R_2 < R_1 < R_3 < R_5$$

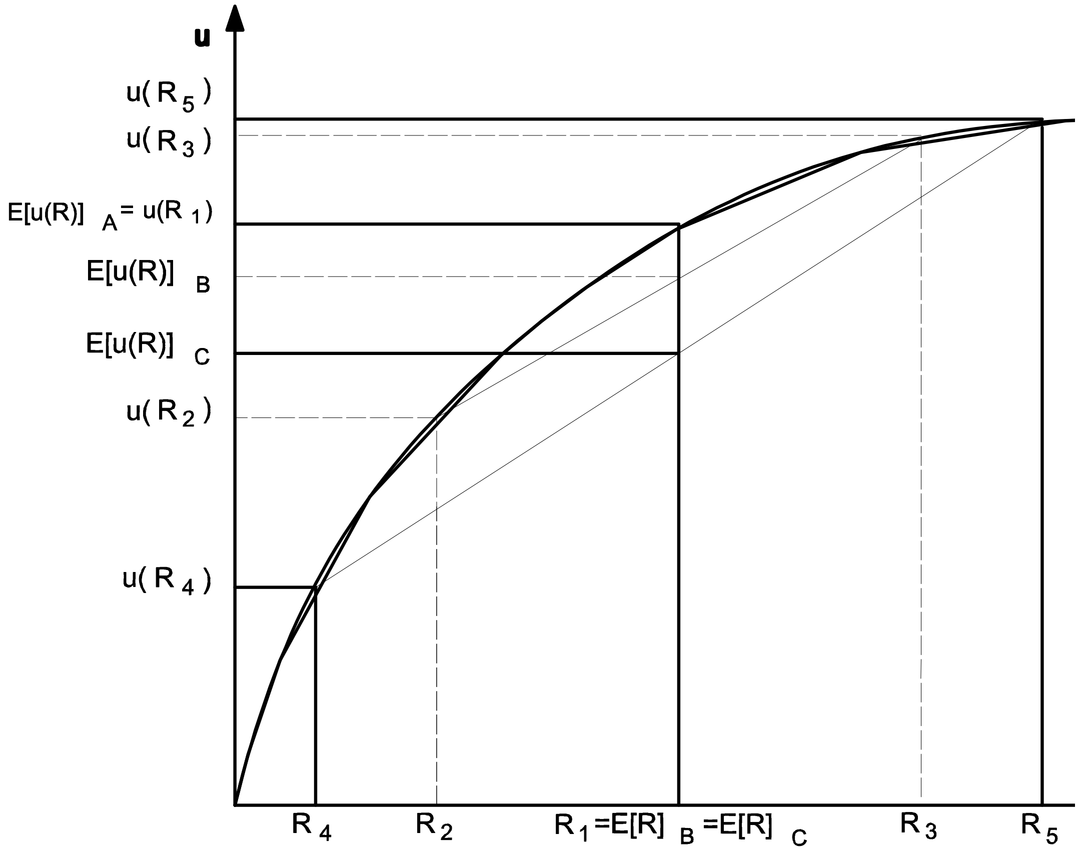
et que les probabiltés rattachées aux projets B et C soient telles que

$$E[R]_A = E[R]_B = E[R]_C$$

le rendement espéré des trois projets soit identique.

Représentons graphiquement ces trois projets et la courbe d'utilité de l'investisseur qui, comme les théories financières le supposent, a de l'aversion pour le risque (figure 8).

FIGURE 8



Puisque

$$E[u(R)]_A > E[u(R)]_B > E[u(R)]_C$$

le projet B est préféré au projet C, et le projet A est a son tour préféré au projet B.

À rendement espéré égal, l'investisseur choisira le projet moins risqué.

Pour affirmer qu'un projet est plus ou moins risqué qu'un autre, la mesure de risque la plus souvent employée en finance est l'écart-type

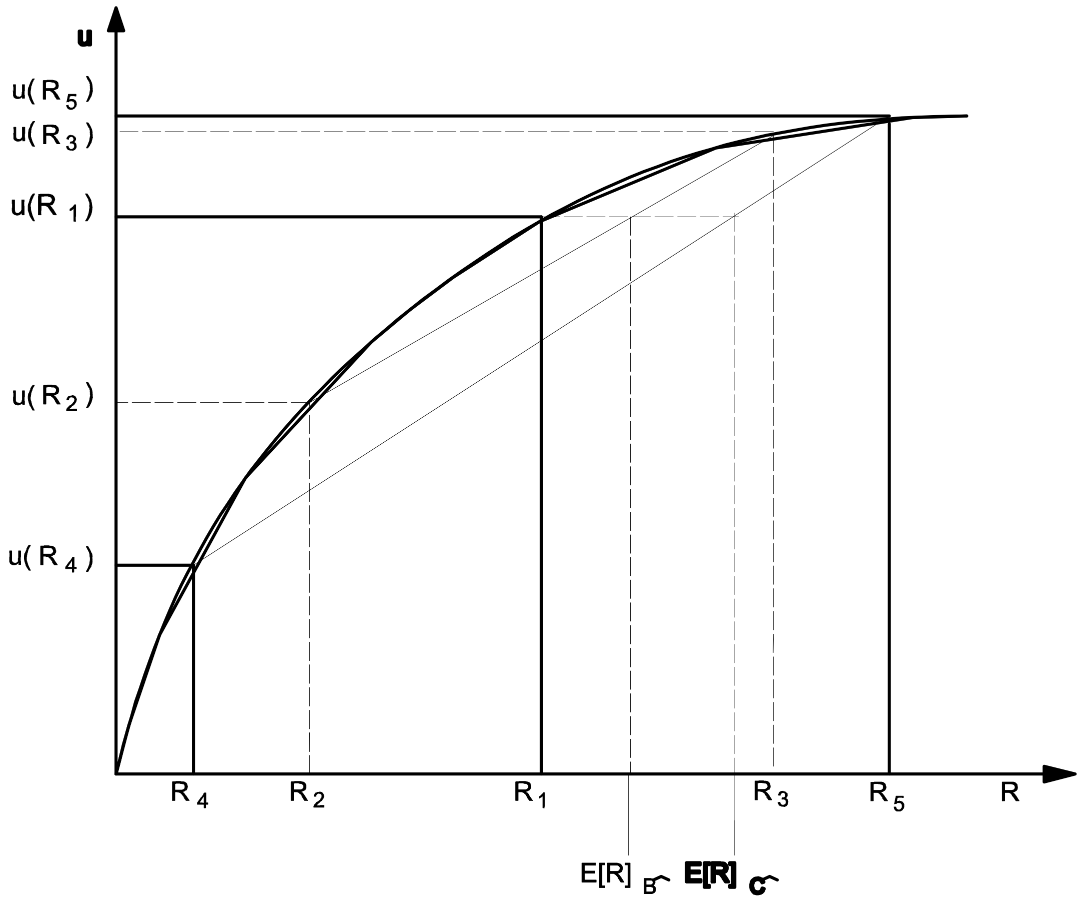
$$\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (X_i - E[X_i])^2} \qquad (\textit{écart - type})$$

Chaque investissement peut être représenté par un point dans l'espace E[R]-σ.

Essayons de tracer une courbe d'indifférence formée des combinaisons de E[R] et σ qui procurent le même niveau d'utilité à l'investisseur.

Pour que l'investisseur soit indifférent entre les trois projets, le rendement espéré du projet B doit passer de $E[R]_B$ à $E[R]_{\hat{B}}$ et celui du projet C de $E[R]_C$ à $E[R]_{\hat{C}}$ (figure 9).

FIGURE 9



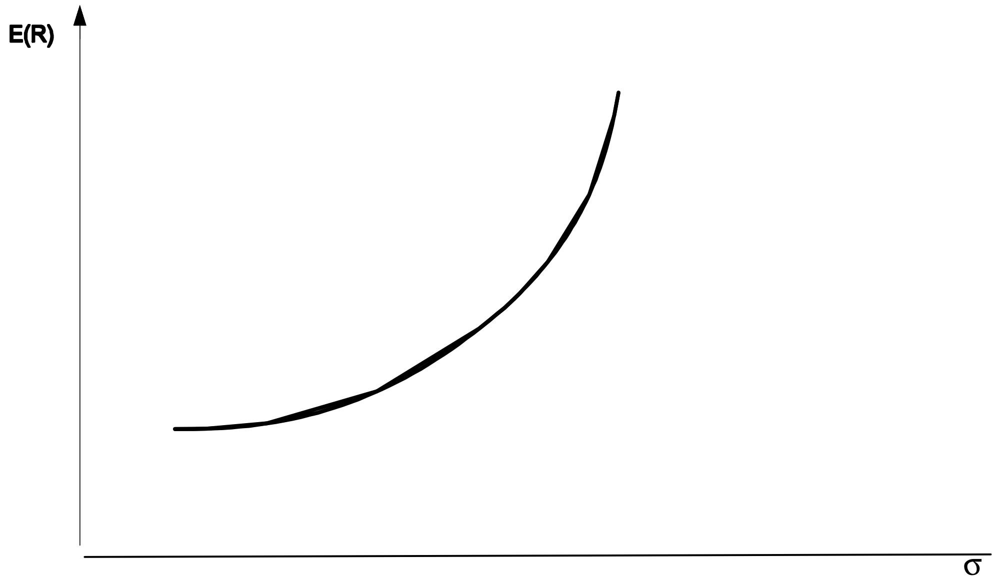
Ainsi, pour maintenir un même niveau d'utilité donné , l'augmentation du risque σ doit être compensée par une augmentation du rendement espéré E[R].

Pour l'individu qui a de l'aversion pour le risque, la courbe d'indifférence E[R]-σ a donc une pente positive et

$$\frac{\delta E[R]}{\delta \sigma} > 0$$

De façon générale plus σ augmente, plus la compensation en E[R] exigée par unité de σ augmente. Ceci nous donne une courbe convexe.

FIGURE 10



En appliquant le même raisonnement, on obtient que

- dans le cas d'un investisseur neutre face au risque, la courbe est une droite horizontale et

$$\frac{\delta E[R]}{\delta \sigma} = 0$$

- dans le cas d'un individu qui aime le risque, la courbe a une pente négative, et généralement, est concave.

$$\frac{\delta E[R]}{\delta \sigma} < 0$$

Dans le CAPM, ce sont ces courbes d'indifférence qui sont utilisées pour déterminer les proportions investies dans l'actif sans risque et dans le portefeuille de marché pour un investisseur.